990. Hodographengleichung ニ就イテ II.

渡辺 次雄（満洲國軍官學校）

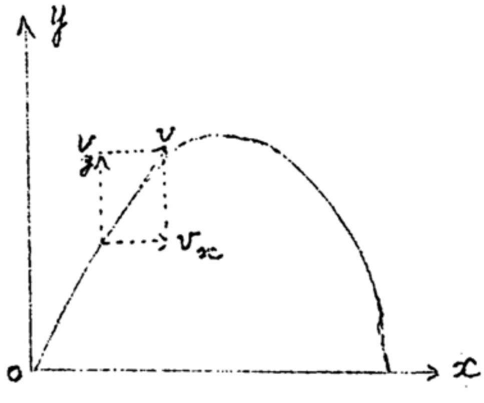
§1. 砲外彈道學ニ出テクル Hodograph 方程式ニツイテ述ベサセテ戴キマス。

〔定義〕 質点ノ運動ノ經路上ノ各点ニ於ケル速度ニ等シイ Vektor ヲ一ツノ原点 O カラ引シトキ夫等 Vektor ノ端点ガ描ク曲線ヲ Hodograph ト云フ。

ヨク知ラレテヰル樣ニ Hodograph 上デノ速度ハ經路上ノ其ノ對應点ニ於ケル加速度ヲ表ハシマス。例ヘバ眞空彈道ニ於テハ彈道上ノ一点ニ於ケル速度ヲ v, ソノ点ニ於ケル切線ガ水平面トナス角ヲ θ トスレバ $v\cos\theta$ ＝一定トナルカラ, Hodograph ハ鉛直方向ノ半直線トナリマス。

§2. 空氣中ノ彈道ノ Hodograph 方程式——

圖ノ樣ニ座標軸ヲトツテ, 彈道上ノ任意ノ一点ニ於ケル速度ヲ v, v ノ x, y 方向ノ分速ヲ v_x, v_y, v ノ傾角ヲ θ トスル。又空氣抵抗ハ速度ノミノ函數トスレバ Newton ノ法則カラ, c ヲ常數トシテ



$$\left\{ \frac{dv_x}{dt} = -c f(v)\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \right.$$

$$\left| \frac{dv_y}{dt} = -cf(v)\sin\theta - g \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \right.$$

ヲ得ル。コレハ弾丸運動ノ方程式デアリマス。（gハ重力加速度）

而ルニ $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$ デアルカラ (1), (2) ヨリ

$$\frac{dv}{dt}\cos\theta - v\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -cf(v)\cos\theta \cdots\cdots (1')$$

$$\frac{dv}{dt}\sin\theta + v\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = -cf(v)\sin\theta - g \cdots\cdots (2')$$

$(2')\times\cos\theta - (1')\times\sin\theta$ ヲツクレバ

$$v\frac{d\theta}{dt} = -g\cos\theta$$

上式ト (1) ヨリ dt ヲ消去スレバ

$$\frac{dv_x}{d\theta} = \frac{c}{g}vf(v)$$

或ハ

$$\boxed{\frac{d(v\cos\theta)}{d\theta} = \frac{c}{g}vf(v)} \qquad (A)$$

コレハ v 及 θ 以外ニハ変数ヲ含マナイカラ，x軸ニ平行ナ直線ヲ持ツ極座標ニツイテ v ヲ動径，θヲ偏角ト考ヘレバ (A) 式ハ Hodograph ノ方程式ヲ表ハス。コレハ弾道学研究上極メテ重要ナ役割ヲモツモノデス。

真空弾道ノ場合ニハ $cf(v) = 0$

$$\therefore \frac{d(v\cos\theta)}{d\theta} = 0 \qquad \therefore v\cos\theta = \text{konst.}$$

即チ Hodograph ハ y軸ニ平行ナ直線トナリマス。

§3. $\boxed{\text{Charbonnier ノ定理}}$

Charbonnierハ佛國砲兵監デ著名ナ弾道学者デス。コヽニ述ベル定理ハ1904年 Traite de bal. ext. 2 Aufl. S. 221. Paris 發表サレタモノデ，次ノ様ニ述ベラレル。

一次抵抗 $cf(v) = cv$ ヲモツトキハ Hodographハ直線デアル。

$\boxed{\text{証明}}$ $$\frac{d(v\cos\theta)}{d\theta} = \frac{c}{g}v^2$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{d\theta}\cos\theta - \sin\theta \cdot v = \frac{c}{g}v^2$$

$$\text{或ハ} \quad \frac{dv}{d\theta} - \tan\theta \cdot v = \frac{c}{g}\sec\theta \cdot v^2$$

コレハ Riccati ノ微分方程式デアル。コレヲ $(v)_0 = v_0$, $(\theta)_0 = \alpha$ ナル條件ノ下ニ解クト

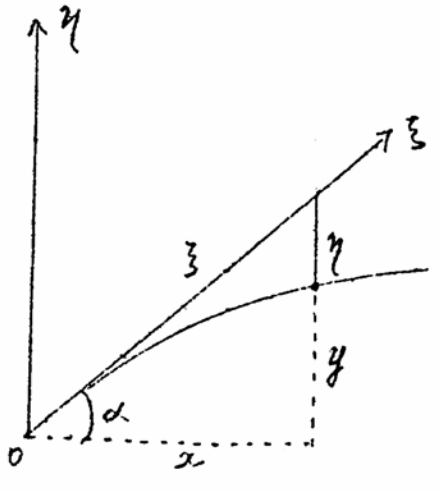
$$\frac{1}{v\cos\theta} - \frac{1}{v_0\cos\alpha} = \frac{c}{g}\tan\alpha - \frac{c}{g}\tan\theta$$

或ハ $$A v\cos\theta + B v\sin\theta - 1 = 0$$

コヽニ $$A = \frac{c}{g}\tan\alpha + \frac{1}{v_0\cos\alpha}, \quad B = -\frac{c}{g}$$

コレハ直線ヲ表ハス。　　Q.E.D

$\boxed{\text{別証}}$ (Cranz: Lehrbuch der Ballistik. I. P. 115)



圖ノヤウナ斜交座標 (ξ, η) ヲトルト

$$\xi\cos\alpha = x,$$
$$\xi\sin\alpha = y + \eta$$

今 $\dfrac{d\xi}{dt}=u$, $\dfrac{d\eta}{dt}=w$, $\dfrac{w}{u}=\dfrac{d\eta}{d\xi}=q$

トオクト,

$$\frac{d\xi}{dt}\cos\alpha=\frac{dx}{dt} \qquad \therefore\ u\cos\alpha=v\cos\theta$$

$$\frac{d\xi}{dt}\sin\alpha=\frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt} \qquad \therefore\ u\sin\alpha=v\sin\theta+w$$

夫々 $\sin\theta$。$-\cos\theta$ ヲ乘ジテ加フレバ

$$u\sin(\theta-\alpha)=-w\cos\theta$$

$$\therefore\ q=-\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ dq=-\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha}d\theta,$$

而ルニ $\quad gd(v\cos\theta)=vcf(v)\,d\theta \qquad cf(v)=cv$

$$\therefore\ g\,du=-cu^2dq$$

$$\therefore\ -\frac{g}{c}\frac{du}{v^2}=dq$$

積分シテ

$$\frac{g}{c}\frac{1}{u}=q+konst. \qquad q=\frac{w}{u}$$

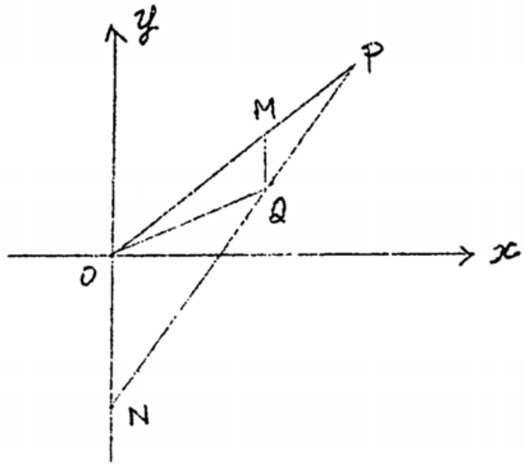
$$\therefore\ \frac{g}{c}\frac{1}{u}=\frac{w}{u}+konst.$$

或ハ $\quad w+konst.\,u=\dfrac{g}{c}$

故ニ Hodograph ハ直線トナル。

$\boxed{別証}$ 或ハ初等幾何學的ニ次ノ様ニ證明サレル。(福村省三：彈道ノ數學 P.201)

P, Q ヲ Hodograph 上ノ二隣接点トシ，P(v, θ)，Q$(v-dv,\ \theta-d\theta)$ トスレバ $\overrightarrow{PQ}$ ハ加速度ヲ表ハス。ソシテコレハ重力加速度 $\overrightarrow{MQ}$ ト空氣抵抗ニヨル加速度 $\overrightarrow{PM}$ ノ合加速度デアル。而ルニ



$$\overrightarrow{MQ} = g\,dt,\quad \overrightarrow{PM} = cf(v)\,dt = cv\,dt.$$

又 $OP = v$

今 PQ ノ延長ガ y 軸ト交ハル点ヲ N トスレバ

$$MQ/ON = PM/PO$$

$$\therefore\ g\,dt/ON = cv\,dt/v \qquad \text{故ニ}\ ON = \frac{g}{c} = \text{一定}$$

故ニ N ハ定点。即チ Hodograph ノ二隣接点ヲトホル直線ハ定点ヲトホルカラ，Hodograph ハ直線デアル。

Q. E. D.

§4 Hodograph 方程式ノ解ノ存在

Hodograph 方程式 (A) ヲ書キナホスト

$$\frac{dv}{d\theta}\cos\theta - v\sin\theta = \frac{c}{g}vf(v)$$

今便宜上 $v : y,\ \theta : x,\ \frac{c}{g}vf(v) = F(v)$ トカケバ上式ハ

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot\tan x + F(y)\cdot\sec x = f(x, y)$$

トナル。モシ$F(y)$, $F(y)$ガ有界デ $-90^\circ < k' < x < k < 90^\circ$ ナラバ

$$|f(x, y)| \leqq M$$

ナルMガ存在シ

又 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |(y_1 - y_2)\tan x$

$$+ (F(y_1) - F(y_2))\sec x|$$

$$\leqq |y_1 - y_2||\tan x| + |F(y_1) - F(y_2)||\sec x|$$

而ルニ $F(y)$ ガ $[a, b]$ デ連続 (a, b) デ微分可能ナラバ平均値ノ定理ヨリ

$$F(y_1) - F(y_2) = (y_1 - y_2)F'(\xi) \quad y_1 < \xi < y_2$$

$$\therefore \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq |y_1 - y_2|[|\tan x| + |F'(\xi)\sec x|]$$

$$\leqq K|y_1 - y_2|$$

上ノ條件ハ彈道學的ニハ小ナル條件デアッテ，即チ Lipschitz ノ條件ハ成立シ，(A) ノ解ハ存在スル。然ラバ如何ニシテコレヲ求メタラヨイカ。コレニツイテハ $F(v)$ ノ特殊ナ形ニツイテ昔カラ色々研究ガアリマス。

§5. Hodograph 方程式ノ求積法

1719年 Johann Bernoulli ハ $cf(v) = cv^n$ (nハ任意ノ正數) ナルトキノ Hodograph 方程式ヲ解イタ。

Die Akten von Leipzig, S. 216.

1744年 D'Alembert ハ $cf(v) = av^n + c$ 及

$cf(v) = a \log v + C$ ナルトキ及ビ係数間ニアル関係ノ成立スルトキニ於テ $cf(v) = av^{n} + R + bv^{-n}$

$cf(v) = a(\log v)^{2} + R \log v + b$ ナルトキ積分シ得ルコトヲ示シタ。

Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, 1744. S. 356. Paris.

1782年 Legendre. A. M. dissertation sur la question de balistique, proposee par l'Académie Roy. des sciences et belles lettres de Prusse, Berlin. 1782.

1901年 Siacci.: Compt. Rend. 132, S. 1175. 1901

Compt Rend. 133, S. 381. 1901

Riv. d'art. e gen., vol. 3, S. 5. 1901

4. S. 5. 1901

1903年 Appel. M.: Arch. d. Math. u. Phys. (3) bd. 5. S. 177

1910年 Quivet: Compt. Rend. Bd. 150. S. 1229.

1911年 Hayashi(林鶴一): giron. d. Mathematische di Battaglini (3) Bd. 49, S. 231.

等ノ研究ガアリ，何レモ局所的ナモノデアッタ。コレノ綜合的ナ研究ハ Jules Drach ニヨッテ為サレタ。

1920年，L'équstion differentielle de la

Balistique Exterieure et son integration par quadratures.
Annales de l'Ecole Normalè Supérieure, 37.

次ニDrach ノ方法ヲ陳ベ，ソレカラ逆弾道問題ニ入リタイト思ヒマス。（續）